| Lycée Ali Bourguiba K.K<br>2019-2020<br>Classe : Bac Math | Devoir de contrôle N°1 | Prof : M$^{er}$ GZARA Mahmoud<br>Matière : Mathématiques<br>Durée : 2 heures |
| --- | --- | --- |

## Exercice 1: (4 points)

Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse

1) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit z = 3i + $e^{i\theta}$

z est imaginaire pur si et seulement si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$

2) On considère l'équation (E) : $1 + z^3 + z^6 + z^9 + z^{12} + z^{15} = 0$

Si z est une solution de (E) alors z est une racine 18$^{\text{ème}}$ de l'unité

3) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $(E_\theta)$ : $(\bar{z}-1)^4 = e^{i\theta}(z+1)^4$

Si z est une solution de $(E_\theta)$ alors z est imaginaire pur

4) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère l'équation $(E_\theta)$ : $z^2 + e^{i\theta} z - 3 = 0$

Il existe un réel $\theta$ tel que $(E_\theta)$ admet une solution double

## Exercice 2: (5,5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. On désigne par A le point d'affixe 1

On considère l'application du plan f qui à tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z ' tel que

$$z' = 1 - \frac{i}{\bar{z}-1}$$

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par f

2) a) Montrer que AM.AM ' = 1

b) Montrer que le triangle AMM' est un triangle indirect et rectangle en A

c) Dans la figure 1 (voir feuille annexe), on a tracé la courbe de la fonction f définie sur ]0,+∞[ par f(x) = $\frac{1}{x}$ dans le repère (O, $\vec{u},\vec{v}$). Construire le point M' image d'un point M donné

3) On suppose que z = 1 + $e^{i\theta}$ où $\theta$ est un réel

a) Montrer que si $\theta$ décrit $\mathbb{R}$, le point M décrit un cercle fixe à caractériser

b) Soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (MM ')

Montrer que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AH}}) \equiv \theta - \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et que AH = $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) En déduire l'affixe du point H

## **Exercice 3 :** (4 points)

$On\ considère\ la\ suite\ U\ définie\ sur\ \mathbb{N}^*\ par\ U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{n+k}$

1) Calculer $U_1$ et $U_2$

2) a) Montrer que la suite U est croissante

b) Montrer que pour tout n $\epsilon$ $\mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{n}{n+1}$

c) En déduire que la suite U converge vers un réel L et que L $\epsilon$ $[\frac{7}{12}, 1]$

3) $On\ considère\ la\ suite\ S\ définie\ sur\ \mathbb{N}^*\ par\ S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k}{kU_k}$

a) Calculer $S_1$ et $S_2$

b) Montrer que la suite $S_{2n}$ est décroissante et $S_{2n+1}$ est croissante

c) En déduire que $S_n$ converge vers une limite L'

d) Vérifier que $-2 \leq L' \leq -\frac{8}{7}$

## **Exercice 4:** (6,5 points)

La courbe C représentée dans la feuille annexe (figure 2) est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{1}{2}\}$. C admet deux asymptotes d'équation x = $-\frac{1}{2}$ et y = $\frac{2}{3}$ et elle admet au point d'abscisse – 2 une tangente T

1) $Calculer\ les\ limites\ suivantes$:

$a) \lim_{x\to 0} f(\frac{\sin(-2x)}{\tan(x)})$ $\quad b) \lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(|f(x)|)$ $\quad c) \lim_{x\to +\infty} f(\frac{1-cosx}{x} - \frac{1}{2})$ $\quad d) \lim_{x\to 0} \frac{xf(x-2)}{1-cosx}$

2) a) Placer le point A(fof(2),0) sur le repère

b) On admet que : fof(x) = x ⇔ f(x) = x. Résoudre graphiquement l'équation fof(x) = x

c) Justifier que fof est continue que sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$

3) On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = fof(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que la suite U est minorée par 1

b) Montrer que la suite U est décroissante

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite

**BON TRAVAIL**

**Feuille annexe**

Nom :……………………………………………………..

Prénom :………………………………………………

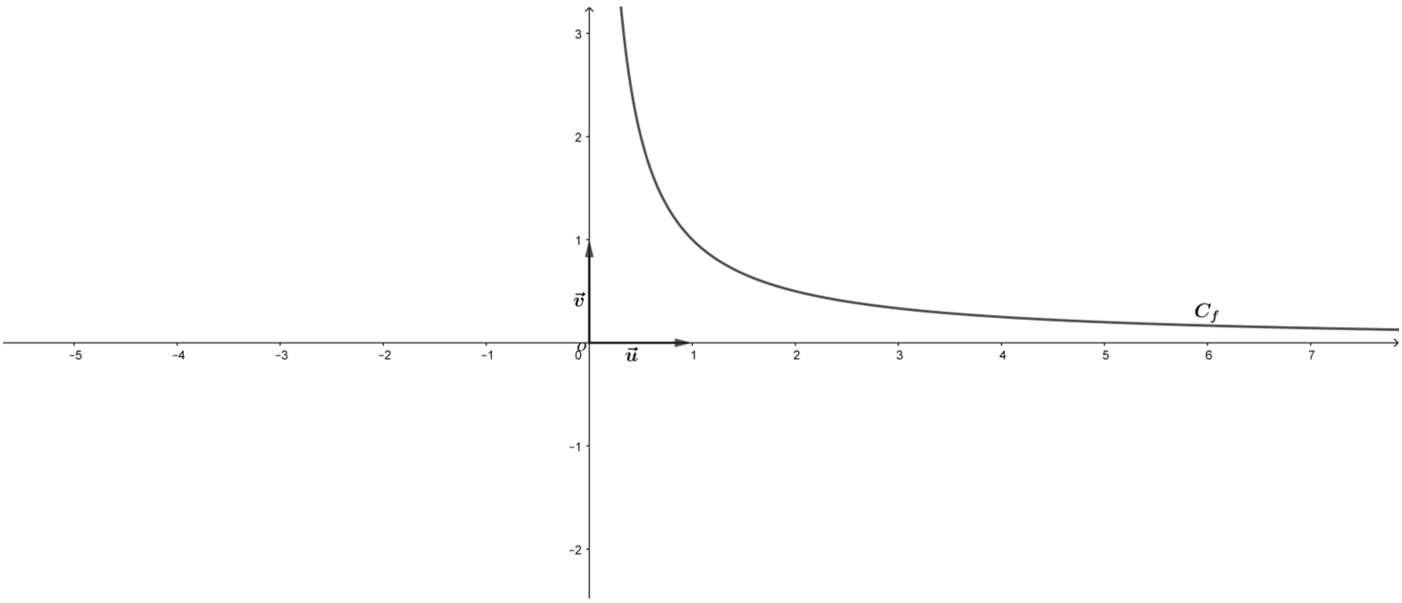


**Figure 1**

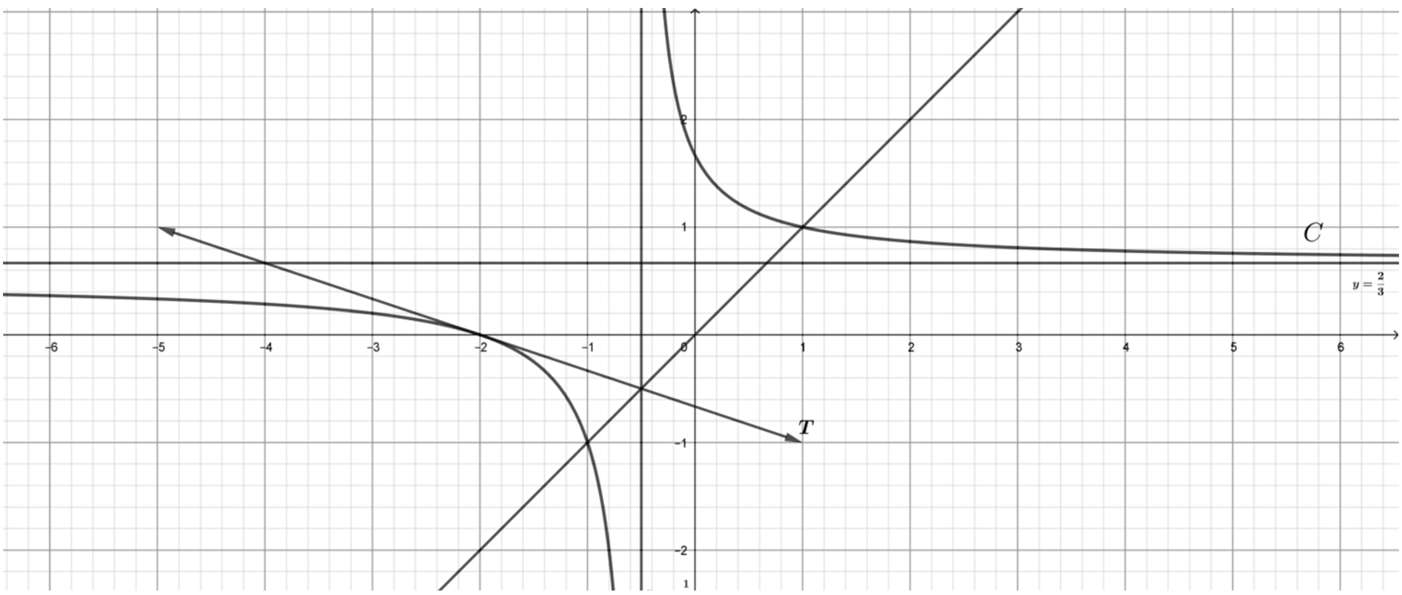


**Figure 2**